

УДК 532.72:532.546:539.3:519.63

Власюк А.П.

Національний університет «Острозька академія»

Жуковська Н.А.

Національний університет водного господарства та природокористування

Жуковський В.В.

Національний університет водного господарства та природокористування

Шендера І.М.

Національний університет водного господарства та природокористування

МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОСТОРОВИХ ДЕФОРМАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ҐРУНТОВИХ МАСИВІВ З УРАХУВАННЯМ ТЕПЛОМАСОПЕРЕНЕСЕННЯ ТА СИЛ ЗВ'ЯЗНОСТІ

У статті проведено математичне моделювання напружено-деформованого стану ґрунтового масиву з урахуванням тепломасоперенесення та сил зв'язності у тривимірному випадку. З метою чисельного розв'язання поставленої крайової задачі створено програмний комплекс можливостями фреймворку Microsoft Visual Studio 2017 для Windows Desktop мовою програмування С#. На основі комп'ютерного моделювання поставленої задачі показано, що врахування сил зв'язності змінює значення зміщень, компонент нормальних та дотичних напружень і деформацій ґрунтового масиву.

Ключові слова: напружено-деформований стан, зміщення, напруження, деформації, тепломасоперенесення, сили зв'язності, чисельні методи, програмний комплекс.

Постановка проблеми. В умовах інтенсивного впливу різноманітних факторів людської діяльності та дії техногенних факторів на навколишнє середовище, зокрема забруднення ґрунтових вод різними розчинами солей та родючих земель радіоактивними речовинами, коливаннями температури, захороненням відходів виробництва, будівництвом атомних електростанцій та водоохолоджувачів біля них тощо, змінюються гідрологічні властивості ґрунтових середовищ. При цьому внаслідок гідродинамічних сил фільтраційного потоку та зміни власної ваги ґрунту, фільтраційних властивостей, може змінитись напружено-деформований стан ґрунтових масивів і основ, що, своєю чергою, досить часто є причиною виникнення аварійних ситуацій. Разом із тим збереження родючості ґрунту є важливим завданням сільськогосподарського виробництва. Механічний обробіток має забезпечити оптимальний напружено-деформований стан родючого шару з метою ефективного зростання культур. Тому постає актуальне питання дослідження факторів, що можуть впливати на деформаційні процеси ґрунтових середовищ, зокрема, врахування внутрішніх сил зв'язності, що залежать не тільки від

складу ґрунту, його вологості та щільності, але і від концентрації сольових розчинів у ньому.

Одним із сучасних методів прогнозування деформаційних процесів ґрунтових масивів та основ цивільних, промислових і гідротехнічних об'єктів та споруд, які потрапляють у зону впливу різних фізико-хімічних факторів, є математичне та комп'ютерне моделювання.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідження деформаційних процесів ґрунтових масивів та основ відображено в роботах науковців [1–3]. Математичне моделювання та дослідження напружено-деформованого стану ґрунтових масивів з урахуванням тепломасоперенесення та залежностей коефіцієнтів фільтрації і Ламе від концентрації сольових розчинів та температури, а також фільтраційних властивостей ґрунтових масивів з урахуванням масоперенесення наведено в працях А.П. Власюк, Н.А. Жуковської, В.В. Жуковського, В.Ю. Федорчук та ін. [4–8]. Вплив концентрації сольових розчинів на сили щеплення в глинистих ґрунтах проведено в роботі Н.Т. Кузла [9]. Однак у цих роботах не розглянуто напружено-деформований стан ґрунтових масивів при врахуванні тепломасоперенесення в ньому та наявності сил зв'язності.

Тому метою статті є дослідження деформаційних процесів ґрунтових масивів з урахуванням впливу тепломасоперенесення та сил зв'язності у тривимірному випадку, побудова відповідної просторової математичної моделі, чисельне розв'язання поставленої крайової задачі та комп'ютерне моделювання отриманих результатів із подальшим аналізом отриманих результатів.

Постановка задачі. Розглянемо водонасичений ґрунтовий масив у тривимірному випадку, що займає область Ω з урахуванням тепломасоперенесення та сил зв'язності в ньому (рис. 1).

Ґрунтовий масив розглядається в межах лінійної теорії пружності з різними пружними параметрами (коефіцієнтами Ламе) $\lambda(c, T)$, $\mu(c, T)$ які залежать від концентрації сольового розчину та температури. На ґрунт діють сила тяжіння, архімедова та фільтраційна сили.

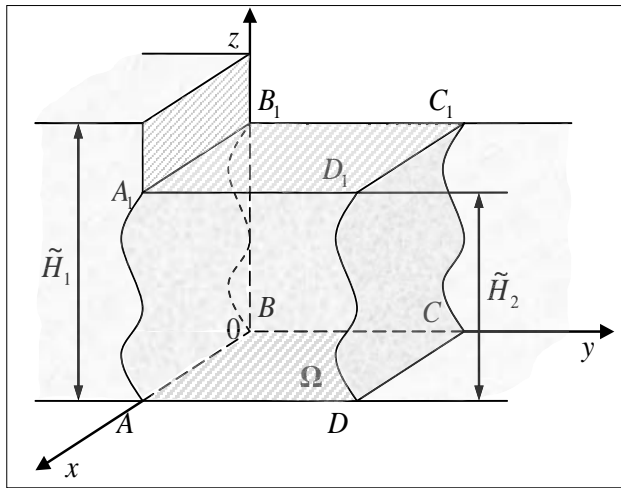


Рис. 1. Схема ґрунтового масиву у тривимірному випадку

На рис. 1. площину $ABCD$ позначимо як Γ_1 , $A_1B_1C_1D_1$ – Γ_2 , ABA_1B_1 і CDC_1D_1 – Γ_3 і Γ_4 відповідно, площини VCB_1C_1 та ADA_1D_1 – Γ_5 та Γ_6 відповідно. Межі Γ_1 та Γ_2 є теплоізолюваними та непроникними, а $\Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6$ – дренажними.

Задані значення п'єзометричних напорів \tilde{H}_1, \tilde{H}_2 , температур \tilde{T}_1 та \tilde{T}_2 у водних басейнах Γ_3, Γ_5 та Γ_4, Γ_6 відповідно, причому $\tilde{H}_1 > \tilde{H}_2, \tilde{T}_1 > \tilde{T}_2$. У лівому басейні задано значення концентрації солей \tilde{C}_1 , а у правому – умову швидкого виносу солей. У результаті різниці напорів відбувається перенесення розчинених у воді речовин та тепла фільтраційним потоком. При цьому процеси фільтрації розчинених у воді речовин та тепла підлягають, відповідно, законам Дарсі, Фіка та Фур'є.

У досліджуваній області ґрунтового масиву Ω необхідно розрахувати розподіли зміщень

$u(X) = (U(X), V(X), W(X))$, нормальних складових деформацій $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ та дотичних складових деформацій $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$, нормальних складових напружень $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ та дотичних складових напружень $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$, п'єзометричних напорів $h(X, t)$ концентрації сольових розчинів $c(X, t)$ та температури $T(X, t)$, $X \in \Omega, t > 0$ при наявності сил зв'язності.

Математична модель задачі. Математична модель поставленої крайової задачі у тривимірному випадку за наявності сил зв'язності та тепломасоперенесення в загальноприйнятих позначеннях має такий вигляд [1–10]:

$$\begin{aligned} & \mu(c, T)\Delta U + (\lambda(c, T) + \mu(c, T)) \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x} + \frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial x} \varepsilon_\theta + \\ & + 2 \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) - \\ & - \left(\left(3 \frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial x} \right) T + (3\lambda(c, T) + 2\mu(c, T)) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \alpha_T + X = 0, \\ & \mu(c, T)\Delta V + (\lambda(c, T) + \mu(c, T)) \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial y} + \frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial y} \varepsilon_\theta + \\ & + 2 \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) - \\ & - \left(\left(3 \frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial y} + 2 \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial y} \right) T + (3\lambda(c, T) + 2\mu(c, T)) \frac{\partial T}{\partial y} \right) \alpha_T + Y = 0, \\ & \mu(c, T)\Delta W + (\lambda(c, T) + \mu(c, T)) \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial z} + \frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial z} \varepsilon_\theta + \\ & + 2 \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) - \\ & - \left(\left(3 \frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial z} + 2 \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial z} \right) T + (3\lambda(c, T) + 2\mu(c, T)) \frac{\partial T}{\partial z} \right) \alpha_T + Z = 0, \quad X \in \Omega, \end{aligned} \quad (1)$$

де компоненти масової сили обчислюються за формулами

$$X = \frac{dp_1}{dx} + f_1(c), \quad Y = \frac{dp_2}{dy} + f_2(c), \quad Z = \gamma_w + \frac{dp_3}{dz} + f_3(c), \quad X \in \Omega, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right), \quad X \in \Omega, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda(c, T)\varepsilon_\theta + 2\mu(c, T)\varepsilon_x - (3\lambda(c, T) + 2\mu(c, T))\alpha_T \bar{T}, \\ \sigma_y &= \lambda(c, T)\varepsilon_\theta + 2\mu(c, T)\varepsilon_y - (3\lambda(c, T) + 2\mu(c, T))\alpha_T \bar{T}, \\ \sigma_z &= \lambda(c, T)\varepsilon_\theta + 2\mu(c, T)\varepsilon_z - (3\lambda(c, T) + 2\mu(c, T))\alpha_T \bar{T}, \end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = 2\mu(c, T)\varepsilon_{xy}, \quad \tau_{xz} = 2\mu(c, T)\varepsilon_{xz}, \quad \tau_{yz} = 2\mu(c, T)\varepsilon_{yz}, \quad (4)$$

та рівняння конвективної дифузії за наявності тепломасоперенесення, рівняння конвективного теплоперенесення, узагальнені рівняння фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах та рівняння нерозривності процесу за відповідних крайових умов на границях ґрунтового масиву для п'єзометричного напору, концентрації солей, температури, зміщень і напружень [6].

Тут: (1) – система рівнянь рівноваги в формі Ламе для зміщень ґрунту з врахуванням тепломасоперенесення; (3) – нормальні та дотичні деформації на підставі співвідношень Коші; (4) –

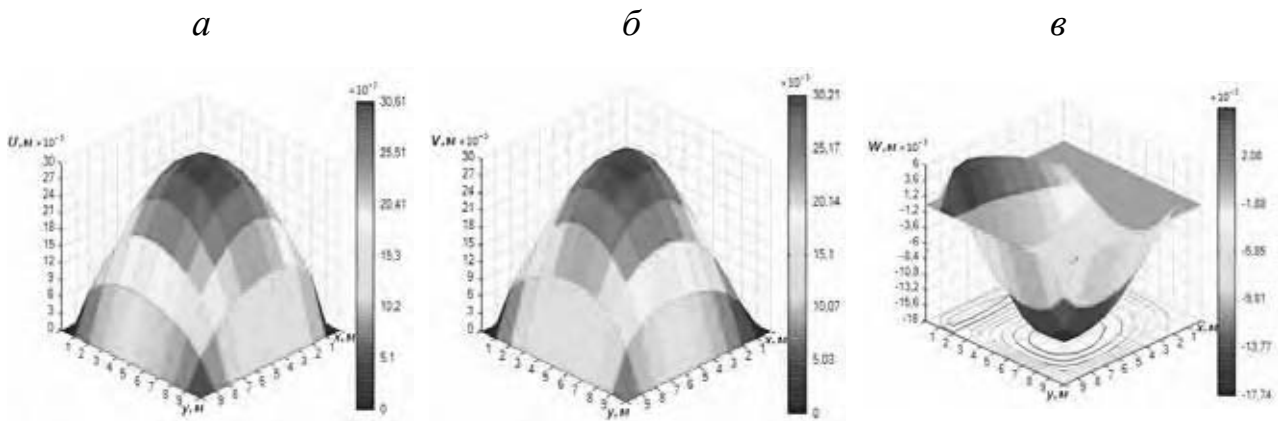


Рис. 2. Розподіли зміщень $U(\mathbf{X})$ (а), $V(\mathbf{X})$ (б), $W(\mathbf{X})$ (в) при $f(c) = ac + b$

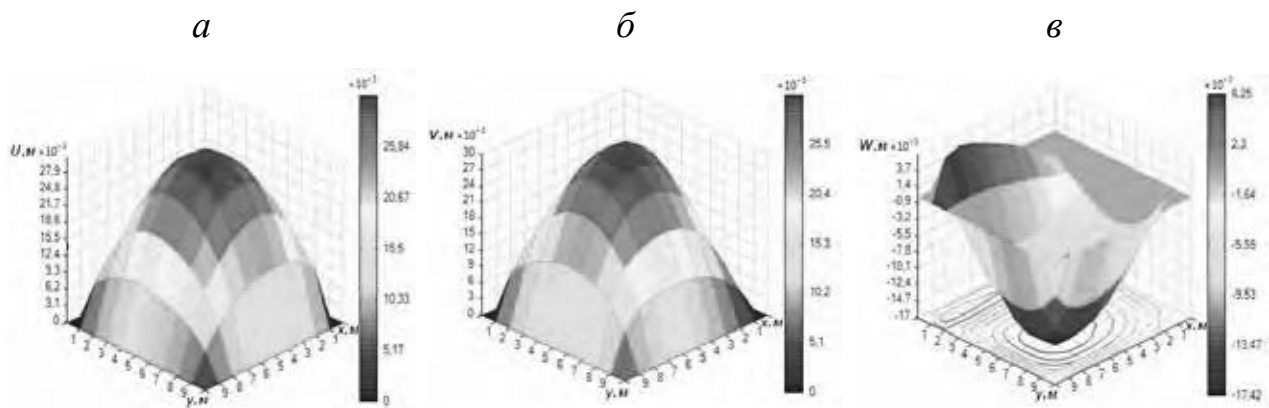


Рис. 3. Розподіли зміщень $U(\mathbf{X})$ (а), $V(\mathbf{X})$ (б), $W(\mathbf{X})$ (в) при $f(c) = \sqrt{ac + b}$

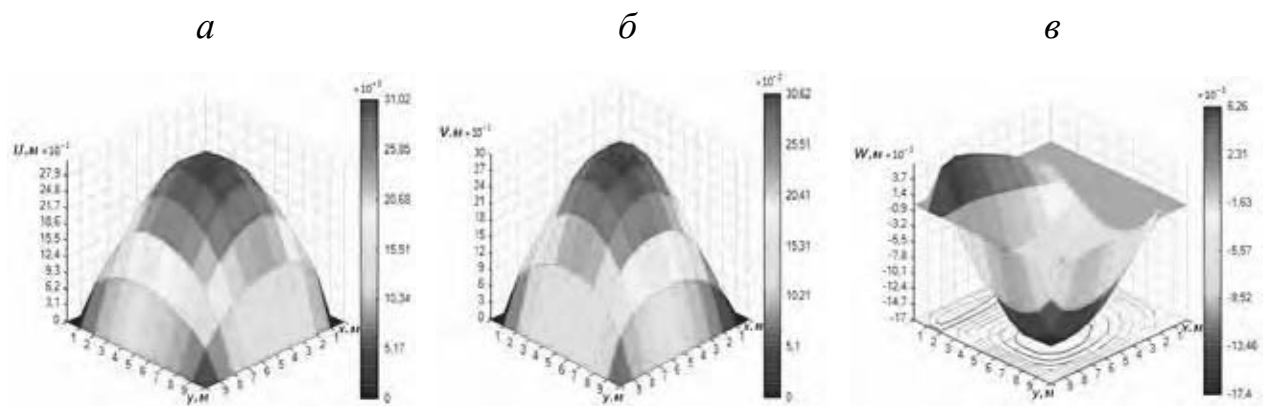


Рис. 4. Розподіли зміщень $U(\mathbf{X})$ (а), $V(\mathbf{X})$ (б), $W(\mathbf{X})$ (в) при $f(c) = a \cdot \ln(cb)$

нормальні та дотичні напруження на основі узагальненого закону Гука в оберненій формі.

У математичній моделі (1)–(4) використано такі позначення: $X = (x, y, z)$ – точка області Ω , $X \in \Omega$; Γ – границя області Ω ; t – час, $t > 0$; $u = (U, V, W)$ – зміщення, м; X, Y, Z – компо-

ненти масової сили, H ; $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ та $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$ – нормальні та дотичні деформації; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ та $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ – нормальні та дотичні напруження, Па; $\varepsilon_\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$; p_1, p_2, p_3 – фільтраційні тиски сольового розчину, Па, $p_1 = \gamma_p(h(X, t) - x)$, $p_2 = \gamma_p(h(X, t) - y)$, $p_3 = \gamma_p(h(X, t) - z)$; $c(X, t) -$

концентрація сольового розчину, г/л; $T(X, t)$ – температура, °C; $h(X, t)$ – п'єзометричний напір, м; $f_1(c)$, $f_2(c)$, $f_3(c)$ – функції, що виражають вплив щільності ґрунту на його деформаційні процеси за рахунок сил зв'язності; $\lambda(c, T)$ і $\alpha(c, T)$ – коефіцієнти Ламе, що залежать від концентрації сольового розчину і температури, Па; $\gamma_{\text{вв}}$ – питома вага ґрунту, що знаходиться у зваженому стані, Па/м; α_T – середній коефіцієнт лінійного теплового розширення в інтервалі температур (T_0, T) [10].

Чисельний розв'язок задачі. Для знаходження значень зміщень $U(X)$, $V(X)$ та $W(X)$ та п'єзометричного напору $h(X, t)$ використано ітераційний метод Гауса-Зейделя. Для знаходження концентрації сольового розчину $c(X, t)$ та температури $T(X, t)$ використано метод прогонки [11].

Результати комп'ютерного моделювання та їх аналіз. Для чисельного розв'язування та комп'ютерного моделювання поставленої крайової задачі створено програмний комплекс можливостями фреймворку Microsoft Visual Studio 2017 для Windows Desktop мовою програмування C#, в якому у вигляді графіків та табличних даних відображено розподіли полів зміщень, компонент нормальних і дотичних напружень та деформацій, а також напору, концентрації солей та температури в досліджуваній області з урахуванням та без урахування впливу тепломасоперенесення та наявності сил зв'язності.

Як приклад, розглянуто просторовий напружено-деформований стан у водонасиченому ґрунтовому масиві в області

$$\Omega = \{X = (x, y, z) : 0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2, 0 \leq z \leq l_3\},$$

що має форму прямокутного паралелепіпеда довжиною $l_1 = 10$ м, товщиною $l_2 = 10$ м та висотою $l_3 = 10$ м при $\alpha_T = 1 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град}}$, $\gamma_{\text{вв}} = 1,3 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}}$, $\gamma_p = 1 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}}$ з такими функціями $f_1(c) = f_2(c) = f_3(c) = f(c)$:

а) $f(c) = ac + b$, $a = \text{const}$, $b = \text{const}$ (лінійна функція);

б) $f(c) = \sqrt{ac + b}$, $a = \text{const}$, $b = \text{const}$ (квадратична функція);

в) $f(c) = a \cdot \ln(cb)$, $a = \text{const}$, $b = \text{const}$ (логіарифмічна функція).

Залежності коефіцієнтів Ламе, коефіцієнта фільтрації від концентрації солевих розчинів взято з робіт А.П. Власюк, М.Т. Кузло, І.А. Філатової [12; 13].

Проведено серію чисельних експериментів, результати яких наведено у вигляді графіків при $t = 1080$ діб.

На рис. 2–4 наведено графіки зміщень $U(X)$, $V(X)$ та $W(X)$ у перерізі площиною xOy при $z = 5$ м з урахуванням тепломасоперенесення та наявності сил зв'язності при $a = 1$, $b = 1$.

Аналогічні графіки отримано для компонент нормальних та дотичних зміщень і напружень.

За результатами чисельних експериментів отримано наведені нижче висновки.

1. Зміщення вздовж осі Ox ($U(X)$) з урахуванням лінійної функції сил зв'язності в середньому зменшуються на 1,37%, квадратичної – 0,09%, логарифмічної – 0,03% порівняно зі зміщеннями без урахування сил зв'язності.

2. Зміщення вздовж осі Oy ($V(X)$) з урахуванням лінійної функції сил зв'язності в середньому зменшуються на 1,37%, квадратичної – 0,09%, логарифмічної – 0,03% порівняно зі зміщеннями без урахування сил зв'язності.

3. Зміщення вздовж осі Oz ($W(X)$) з урахуванням лінійної функції сил зв'язності в середньому зменшуються на 3,61%, квадратичної – 0,24%, логарифмічної – 0,09% порівняно зі зміщеннями без урахування сил зв'язності.

Аналогічні результати отримано для компонент нормальних та дотичних зміщень і напружень.

Таким чином, врахування сил зв'язності у розглянутому водонасиченому ґрунтовому масиві змінює розподіл зміщень, компонент нормальних та дотичних деформацій та напружень. Зокрема, найбільший вплив здійснює лінійна функція сил зв'язності, а найменший – логарифмічна.

Висновки. У статті сформульовано постановку задачі та проведено математичне і комп'ютерне моделювання просторового напружено-деформованого стану ґрунтового масиву з урахуванням впливу тепломасоперенесення та наявності сил зв'язності. Знайдено чисельний розв'язок поставленої крайової задачі. З метою проведення комп'ютерного моделювання створено програмний комплекс можливостями фреймворку Microsoft Visual Studio 2017 для Windows Desktop мовою програмування C# та розглянуто водонасичений ґрунтовий масив, що має форму прямокутного паралелепіпеда. Як показали результати комп'ютерного моделювання та проведених чисельних експериментів, врахування сил зв'язності змінює напружено-деформований стан ґрунтового масиву за наявності тепломасоперенесення в ньому.

Список літератури:

1. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. К.: Наукова думка, 1991. 432 с.

2. Encyclopedia of Thermal Stresses / Editor R.B. Hetnarski. Springer Dordrecht Heidelberg New York London, 2014.
3. Власюк А.П., Кузло М.Т. Математичне моделювання деформацій ґрунтових масивів при дії техногенних факторів: Монографія. Рівне: НУВГП, 2017. 211 с.
4. Vlasyuk A.P., Zhukovskaya N.A. Mathematical simulation of the stressed-strained state of the foundation of earth dams with an open surface under the influence of heat and mass transfer in two-dimensional case. Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2015. Vol. 88(2). Pp. 329–341.
5. Vlasyuk A.P., Zhukovska N.A., Zhukovskyy V.V., Klos-Witkowska A., Pazdriy I., Iatsykovska U. Mathematical Modelling of three-dimensional problem of soil mass stressed-strained state considering mass and heat transfer. Proceedings of the 2017 IEEE 9th International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications. September 2017. Vol. 1. Pp. 265–269.
6. Власюк А.П., Жуковська Н.А., Жуковський В.В., Федорчук В.Ю. Математичне та комп'ютерне моделювання впливу тепломасоперенесення на просторовий напружено-деформований стан ґрунтового масиву. Вчені записки Таврійського національного технічного університету імені В.І. Вернадського. Серія: Технічні науки. 2018. Том 29 (68). № 2. С. 108–115.
7. Vlasyuk A., Borowik B., Zhukovska N., Zhukovskyy V., Karpinskiy V. Computer modeling of heat and mass transfer effect on the three-dimensional stressed-strained state of soil massif. 18th International Multidisciplinary Scientific Geoconference SGEM 2018. 2018. Т. 18, №1.2. Pp. 153–160.
8. Vlasyuk A., Kochan R., Zhukovskyy V., Zhukovska N. Mathematical and computer modeling of contaminant migration to filter trap in two-dimensional nonlinear case. 18th International Multidisciplinary Scientific Geoconference SGEM 2018. 2018. Т. 18, № 2.2. Pp. 293–300.
9. Кузло Н.Т. Исследование влияния концентрации солевых растворов на силы сцепления в глинистых грунтах. Гидротехническое строительство. 2013. № 5. С. 51–53.
10. Коваленко А.Д. Термоупругость. К.: Вища школа, 1975. 216 с.
11. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. М.: Наука, 2003. 316 с.
12. Власюк А.П., Кузло М.Т. Експериментальні дослідження деяких параметрів фільтрації сольових розчинів в піщаних ґрунтах. Меліорація і водне господарство. Міжвідомчий темат. наук. зб. К., 2000. Вип. 87. С. 43–46.
13. Кузло М.Т., Філатова І.А. Дослідження впливу концентрації сольових розчинів на деформаційні характеристики ґрунтів. Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво. Зб. наук. праць. Вип. 31. Рівне: НУВГП, 2007. С. 175–182.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ДЕФОРМАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ГРУНТОВОГО МАССИВА С УЧЕТОМ ТЕПЛОМАСОПЕРЕНОСА И СИЛ СВЯЗНОСТИ

В статье проведено математическое моделирование напряженно-деформированного состояния ґрунтового массива с учетом тепломасопереноса и сил связности в трехмерном случае. Для численного решения поставленной краевой задачи создан программный комплекс возможностями фреймворка Microsoft Visual Studio 2017 для Windows Desktop на языке программирования C#. На основании компьютерного моделирования поставленной задачи показано, что учет сил связности изменяет значение смещений, компонент нормальных и касательных напряжений и деформаций ґрунтового массива.

Ключевые слова: *напряженно-деформированное состояние, смещения, напряжения, деформации, тепломасоперенос, силы связности, численные методы, программный комплекс.*

MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELLING OF THREE-DIMENSIONAL DEFORMATION PROCESSES OF SOIL MASSIF UNDER HEAT AND MASS TRANSFER AND COMMUNICATION FORCES EFFECT

The article presents a mathematical modeling of the stressed-strained state of the soil massif under heat and mass transfer and the forces of connectivity effect in the three-dimensional case. For the numerical solution of the set boundary problem, a software package was created with the capabilities of the Microsoft Visual Studio 2017 framework for Windows Desktop in the C# programming language. Based on the computer simulation of the task, it is shown that the inclusion of the connected forces changes the value of the displacements, the components of the normal and tangential stresses and deformations of the soil massif.

Key words: *stressed-strained state; displacements; stresses; strains; mass and heat transfer; forces of connectivity; numerical methods; software complex.*